Themenheft:

Übergangsmatrizen

Prozess-Diagramme

Markow-Ketten

Viele Berechnungen werden mit dem CAS-Rechner TI Nspire durchgeführt.

Datei 62321

Friedrich Buckel

Neu geschrieben

Stand: 13. August 2012

DEMO für www.mathe-cd.de

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text ersetzt den Vorgängertext dessen Titel lautete 52331 Matrizen Anwendungen 3.
Dieser wurde in zwei Texte gesplittet.

62331 Themenheft, Einführung in diese Thematik (dieser Text)

62332 Aufgabensammlung mit Lösungen

Ferner wird ein Text erstellt:

72333 Abituraufgaben dazu

Dieses Thema ist sehr umfangreich. Meine Arbeit daran ist noch nicht abgeschlossen.
Daher gebe ich die neuen Texte bereits ab der CD-Version 12.8.0 heraus, damit man sie später
Bei mir anfordern kann (ab November) und dann bereits ein vorbereitetes Menü auf der CD besitzt.

DEMO für www.mathe-cd.de

Inhalt

1	**Grundsätzliches**	3
2	**Einführende Beispiele**	4
	Beispiel 1 (Mietwagen-Karussell)	4
	Beispiel 2 (Kundenwanderung beim Autokauf)	7
3	**Spiele analysieren – absorbierende Zustände**	9
	Beispiel 3 (Mensch ärgere dich nicht)	9
	Beispiel 4 (Glücksrad)	12
	Definition: **Markow-Kette**	17
	Beispiel 5 (Münze werfen)	19
	Beispiel 6 (Würfeln)	22
4	**Verweildauer u. a. berechnen**	25
	Beispiel 7 (Käfer und Vogel)	25
	Berechnung der mittleren Überlebensdauer	26
	Berechnung der Absorptionswahrscheinlichkeiten	27
	Berechnung von Verweilzeiten und Übergangsanzahlen	28
	Beispiel 8 (Vererbung von Eigenschaften)	31

1 Grundsätzliches

Mit Vektoren kann man Zustände erfassen. Beispielsweise beschreibt $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ einen Zustand.

Dieser kann die Position eines Gegenstandes im Raum sein. Die Koordinaten a_1, a_2 und a_3 können aber auch Temperatur, Druck, Masse ausdrücken, oder Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten bestimmter Ereignisse.

Ein durch $\vec{a}$ beschriebene Zustand erfahre jetzt eine Veränderung. Damit wir mit unseren mathematischen Fähigkeiten mithalten können, **betrachten wir nur solche Veränderungen, die man durch lineare Gleichungen beschreiben (berechnen) kann**. Der nach der Veränderung vorhandene Zustand soll durch einen neuen Zustandsvektor $\vec{b}$ beschrieben werden. Und wir haben "soeben" erfahren, dass man diesen Vektor wie folgt aus dem alten Zustandsvektor $\vec{a}$ berechnen kann:

Beispiel:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0{,}5 \cdot a_1 + 0{,}6 \cdot a_2 + 0{,}4 \cdot a_3 \\ b_2 &= 0{,}25 \cdot a_1 + 0{,}3 \cdot a_2 + 0{,}2 \cdot a_3 \\ b_3 &= 0{,}25 \cdot a_1 + 0{,}1 \cdot a_2 + 0{,}4 \cdot a_3 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist ein neuer Zustandsvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Es wird vorausgesetzt, dass der Leser weiß, dass man das Gleichungssystem in Matrixform so darstellen kann:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Oder ganz kurz: $\vec{b} = U \cdot \vec{a}$

Die Matrix $U = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ charakterisiert die Zustandsänderung.

Man nennt sie daher auch eine **Übergangsmatrix**, denn sie beschreibt den Übergang von einem Zustand in einen anderen.

Aus diesem Ansatz kann man Folgerungen entwickeln, die sehr weitreichend sind. Beispielsweise kann man mehrfach nacheinander Veränderungen vornehmen, dann entwickeln sich die Zustände immer weiter. Dies alles lassen wir in Beispielen auf uns wirken.

DEMO für www.mathe-cd.de

2 Einführende Beispiele

Beispiel 1 (Mietwagen-Karussell)

Ein Autohaus besitzt 3 Filialen: In A-Stadt, B-Stadt und in C-Stadt. Es hat Mietwagen, die an jedem der drei Standorte abgeholt aber auch abgegeben werden können. Zur Vereinfachung untersuchen wir das Modell, bei dem ein Auto maximal einen Tag lang gemietet werden kann, d.h. es wird am selben Tag an einem der drei Standorte abgeholt und (ggf. an einem anderen Standort) abgegeben.

Die Leitung des Autohauses hat aus den Daten der letzten Monate eine Statistik über die Standortwechsel der Fahrzeuge erstellt und in einer Tabelle festgehalten:

A	B	C	
0,5	0,6	0,4	A
0,25	0,3	0,2	B
0,25	0,1	0,4	C

Spalte 1: Mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 wird ein **in A abgeholtes Auto** wieder in A abgegeben. Mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 wird es jedoch in B abgegeben und mit 0,25 in C.

Spalte 2: Ein Auto, das **in B abgeholt** wird, findet man abends mit 60% Wahrscheinlichkeit in A, mit 30% Wahrscheinlichkeit wieder in B und mit 10% Wahrscheinlichkeit in C.

Spalte 3: Die **in C entliehenen Autos** tauchen mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 in A auf, mit 0,2 in B und mit 0,4 in C.

a) Untersuchung von Zustandsübergängen:

usw. auf CD

DEMO für www.mathe-cd.de